Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Zusatzblatt

Dieses Blatt dient **nicht zur Abgabe**, jedoch zum Üben von klausurrelevantem Stoff.

Aufgabe 1.1

Die *Differenzmenge/Restmenge* zweier Mengen X und Y ist gegeben durch $X\backslash Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathbb{Z}_n \backslash \mathbb{Z}_n^\times$ genau dann ein kommutativer Ring ohne Eins ist, wenn $n = p^k$ für eine Primzahl p und ein $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Aufgabe 1.2

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n\times n}(K)$ zunächst so, dass $AB = I_n$. In diesem Fall wird A *linksinvers* zu B genannt.

(a) Sei $X \in M_{n\times 1}(K)$. Zeigen Sie, dass $BX = 0$ genau dann gilt, wenn $X = 0$ erfüllt ist. Folgern Sie, dass das lineare Gleichungssystem $B\underline{X} = \underline{c}$ für jedes $\underline{c} \in M_{n\times 1}(K)$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass A auch *rechtsinvers* zu B ist, d.h. es gilt $BA = I_n$.

(c) Seien nun $C, D \in M_{n\times n}(K)$ beliebig aber derart, dass $CD + C + D = 0$. Beweisen Sie $CD = DC$.

Aufgabe 1.3

(a) Lösen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + 10y - 22z &= 0 \\ 3x + y + z &= 12 \\ 7x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

(b) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass $A\underline{X} = \underline{b}$ genau dann eine Lösung für jedes $\underline{b} \in M_{n\times 1}(K)$ besitzt, wenn die Spalten von A eine Basis des $M_{n\times 1}(K)$ bilden.

Aufgabe 1.4

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die *Spur* (engl. *trace*) einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_{n\times n}(K)$ ist gegeben durch $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\operatorname{tr}\colon M_{n\times n}(K) \to K, A \mapsto \operatorname{tr}(A)$ eine lineare Abbildung ist.

(2) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_{n\times n}(K)$ schon $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ gilt.

(3) Zeigen Sie, dass genau dann zu jeder Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ein $a \in K$ mit $\operatorname{tr}(A - aI_n) = 0$ existiert, wenn die Charakterisik von K nicht n teilt.

Aufgabe 1.5

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$f\colon M_{5\times 1}(\mathbb{F}_2) \to M_{5\times 1}(\mathbb{F}_2), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f ein linearer Operator ist und bestimmen Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Standardbasis von $M_{5\times 1}(\mathbb{F}_2)$.

(b) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\dim(\ker(f)) = k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V deart existiert, dass $f(b_i) = 0$ genau dann gilt, wenn $i \le k$.